



## Transformação de Sundman aplicado ao Problema Restrito dos Três Corpos Perturbado

Guilherme Afonso Siqueli <sup>1</sup>, Hélio Koiti Kuga <sup>2</sup>, Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, Brasil  
Aluno de Doutorado do curso de Mecânica Espacial e Controle - CMC.

<sup>2</sup>Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, Brasil

guilherme.siqueli@inpe.br

---

**Resumo.** Este trabalho explora a transformação de Sundman para aplicá-lo no problema circular restrito dos três corpos (PCR3C) considerando perturbações de forma no primário (neste trabalho de  $J_2$  à  $J_6$ ). São apresentados resultados para algumas órbitas e comparando os Métodos de Cowell, a transformação de Sundman ( $dt = rds$ ). Por fim, são comparados os resultados dos métodos e propostos trabalhos futuros.

---

**Palavras-chave:** Perturbações; Transformação de Sundman; Integração numérica, PCR3C.

### 1. Introdução

A estimativa do movimento orbital de satélites artificiais (e naturais) são intrínsecamente dependentes da modelagem matemática da física que governa o movimento destes corpos e também dos métodos e integradores utilizados para fazer o cálculo computacional. Este trabalho explora a transformação de Sundman e a aplica no problema circular restrito dos três corpos (PCR3C) considerando perturbações de forma no primário (neste trabalho de  $J_2$  à  $J_6$ ). Para tal são utilizados os métodos de Cowell, a transformação de Sundman simples e o desenvolvimento de integradores Runge-Kutta de quarta ordem e Preditor-Corretor. A transformação de Sundman implica em um sistema de 7 Equações diferenciais enquanto que o método de Cowell apresenta um sistema de 6 equações apenas. Contudo, apesar da complexidade numérica, espera-se que a precisão numérica aumente para um mesmo passo de integração adotado.

### 2. Metodologia

Para o desenvolvimento deste trabalho, considerou-se o problema circular restrito dos três corpos (PCR3C) perturbado, considerando perturbações de forma no primário de  $J_2$  à  $J_6$ .

No PCR3C um corpo de massa  $m_3$  orbitando dois corpos de massas  $m_1$  e  $m_2$  respectivamente



$$\ddot{\vec{r}}_3 = - \left( \frac{\mu_1}{r_{13}^3} \vec{r}_{13} + \frac{\mu_2}{r_{23}^3} \vec{r}_{23} \right) \quad (1)$$

em que  $r$  é o vetor posição em relação a origem do sistema de coordenadas,  $\mu_1$  é a constante gravitacional do primeiro primário,  $\mu_2$  é a constante gravitacional do segundo primário,  $r_{13}$  e  $r_{23}$  são, respectivamente, os vetores posição em relação aos primários  $C_1$  e  $C_2$ , dados por

$$\begin{aligned} r_{13}^2 &= (x + a^*)^2 + y^2 + z^2 \\ r_{23}^2 &= (x - b^*)^2 + y^2 + z^2 \end{aligned} \quad (2)$$

em que  $a^*$  e  $b^*$  são das distância entre o primário  $C_1$  e o baricentro e o primário  $C_2$  e o baricentro, respectivamente.

Após a dedução do modelo (que não é escopo deste trabalho) as equações para o PRC3C ficam da forma (KOPAL,1963):

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\dot{y} - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{s_1^3} - \frac{\mu(x+1-\mu)}{s_2^3} \\ -2\dot{x} - \frac{(1-\mu)y}{s_1^3} + \frac{\mu y}{s_2^3} \\ -\frac{(1-\mu)z}{s_1^3} + \frac{\mu z}{s_2^3} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Este modelo descreve o movimento de um corpo de massa  $m_3$  orbitando dois corpos de massas  $m_1$  e  $m_2$  respectivamente, sendo que estes dois descrevem uma órbita circular em torno do baricentro do sistema. Para efeitos de simplificação a massa  $m_3$  é desprezível perante as demais.

Este trabalho considera também o efeito da forma de um dos primários do movimento orbital. Os polinômios de Legendre são dados pela Equação 4:

$$P_i \left( \frac{z}{r} \right) = \frac{1}{2^i i!} \frac{d^i}{d \left( \frac{z}{r} \right)^i} \left[ \left( \left( \frac{z}{r} \right)^2 - 1 \right)^i \right] \quad (4)$$

Neste trabalho são avaliados os efeitos dos potenciais até a sexta ordem.

O potencial devido a forma dos corpos é dado pela Equação 5

$$V_{J_i} = \frac{\mu}{r} \sum_{i=2}^{10} J_i \left( \frac{r_p}{r} \right)^i P_i \left( \frac{z}{r} \right) \quad (5)$$

A aceleração é dada então pela expressão 7

$$\vec{a}_{J_i} = \nabla V_i \quad (6)$$

$$\vec{a}_{J_i} = - \left( \frac{\partial V_i}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V_i}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V_i}{\partial z} \hat{k} \right) \quad (7)$$



Para  $J_2$  a função potencial, calculada a partir das expressões 4 e 5 (para  $i = 2$ ), é dada por 8

$$V_{J_2} = \frac{1}{2} \mu J_2 r_p^2 \left( \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) \quad (8)$$

A aceleração devido ao segundo harmônico, calculada a partir da expressão (para  $i = 2$ ), é dada pela expressão 9

$$a_{J_2} = -\frac{1}{2} \mu J_2 r_p^2 \begin{bmatrix} -\frac{15xz^2}{r^7} + \frac{3x}{r^5} \\ -\frac{15yz^2}{r^7} + \frac{3y}{r^5} \\ -\frac{15z^3}{r^7} + \frac{9z}{r^5} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Utilizando o mesmo procedimento, pode-se derivar as expressões das acelerações para os  $J_3$ ,  $J_4$ ,  $J_5$  e  $J_6$ , que são dados pelas expressões 10,11,12 e 13 respectivamente.

$$a_{J_3} = -\frac{1}{2} \mu J_3 r_p^3 \begin{bmatrix} -\frac{35xz^3}{r^9} + \frac{15xz}{r^7} \\ -\frac{35yz^3}{r^9} + \frac{15yz}{r^7} \\ -\frac{35z^4}{r^9} + \frac{30z^2}{r^7} - \frac{3}{r^5} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$a_{J_4} = -\frac{1}{8} \mu J_4 r_p^4 \begin{bmatrix} -\frac{315xz^4}{r^{11}} + \frac{210xz^2}{r^9} + \frac{15x}{r^7} \\ -\frac{315yz^4}{r^{11}} + \frac{210yz^2}{r^9} + \frac{15y}{r^7} \\ -\frac{315z^5}{r^{11}} - \frac{70z^3}{r^9} - \frac{75z}{r^7} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$a_{J_5} = -\frac{\mu J_5 r_p^5}{384} \begin{bmatrix} -33264 \frac{xz^5}{r^{13}} + 30240 \frac{xz^3}{r^{11}} - 5040 \frac{xz}{r^9} \\ -33264 \frac{yz^5}{r^{13}} + 30240 \frac{yz^3}{r^{11}} - 5040 \frac{yz}{r^9} \\ -33264 \frac{z^6}{r^{13}} + 45360 \frac{z^4}{r^{11}} - 15120 \frac{z^2}{r^9} + \frac{720}{r^7} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$a_{J_6} = -\frac{\mu J_6 r_p^6}{16} \begin{bmatrix} -3003 \frac{xz^6}{r^{15}} + 3465 \frac{xz^4}{r^{13}} - 945 \frac{xz^2}{r^{11}} + 35 \frac{x}{r^9} \\ -3003 \frac{yz^6}{r^{15}} + 3465 \frac{yz^4}{r^{13}} - 945 \frac{yz^2}{r^{11}} + 35 \frac{y}{r^9} \\ -3003 \frac{z^7}{r^{15}} + 4851 \frac{z^5}{r^{13}} - 2205 \frac{z^3}{r^{11}} + 245 \frac{z}{r^9} \end{bmatrix} \quad (13)$$

O modelo modificado, apresentado pelas Equações 3, ou seja, considerando os efeitos perturbativos, fica da forma 14:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\dot{y} - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{s_1^3} - \frac{\mu(x+1-\mu)}{s_2^3} + a_{J_2,x} + a_{J_3,x} + a_{J_4,x} + a_{J_5,x} + a_{J_6,x} \\ -2\dot{x} - \frac{(1-\mu)y}{s_1^3} + \frac{\mu y}{s_2^3} + a_{J_2,y} + a_{J_3,y} + a_{J_4,y} + a_{J_5,y} + a_{J_6,y} \\ -\frac{(1-\mu)z}{s_1^3} + \frac{\mu z}{s_2^3} + a_{J_2,z} + a_{J_3,z} + a_{J_4,z} + a_{J_5,z} + a_{J_6,z} \end{bmatrix} \quad (14)$$



Para o Método de Cowell são definidas 6 variáveis  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$  da forma:

$$\begin{aligned}x_1 &= x \\x_2 &= \dot{x} \\x_3 &= y \\x_4 &= \dot{y} \\x_5 &= z \\x_6 &= \dot{z}\end{aligned}\tag{15}$$

Derivando as equações acima, temos o modelo matemático e espaço de estados para ser integrado (Equação 16):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{-\mu x_1}{(x_1^2 + x_3^2 + x_5^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{-\mu x_3}{(x_1^2 + x_3^2 + x_5^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \dot{x}_5 &= x_6 \\ \dot{x}_6 &= \frac{-\mu x_5}{(x_1^2 + x_3^2 + x_5^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}\tag{16}$$

O modelo descrito pelo conjunto de equações dado por 16 será chamado neste trabalho de Modelo de Cowell.

Em seguida, foi realizada uma Transformação de Sundman simples, da forma  $dt = r ds$  e obteve-se o modelo dado pelas Equações 17:

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r'}{r} \frac{dx}{ds} + \left( 2\dot{y} - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{s_1^3} - \frac{\mu(x+1-\mu)}{s_2^3} + a_{J_2,x} + a_{J_3,x} + a_{J_4,x} + a_{J_5,x} + a_{J_6,x} \right) \\ \frac{r'}{r} \frac{dy}{ds} + \left( -2\dot{x} - \frac{(1-\mu)y}{s_1^3} + \frac{\mu y}{s_2^3} + a_{J_2,y} + a_{J_3,y} + a_{J_4,y} + a_{J_5,y} + a_{J_6,y} \right) \\ \frac{r'}{r} \frac{dz}{ds} + \left( -\frac{(1-\mu)z}{s_1^3} + \frac{\mu z}{s_2^3} + a_{J_2,z} + a_{J_3,z} + a_{J_4,z} + a_{J_5,z} + a_{J_6,z} \right) \end{bmatrix}\tag{17}$$

A modelagem em variáveis de estado é similar ao procedimento feito nas Equações 15 e 16 e para economia textual não serão apresentados. Vale ressaltar que é inserida uma nova variável  $x_7 = t$ .



### 3. Resultados e Discussão

Foram simulados diversos casos:

- Método de Cowell com integrador Runge-Kutta de quarta ordem (RK4)
- Transformação de Sundman ( $dt = rds$ ) com RK4
- Transformação de Sundman ( $dt = rds$ ) com Preditor corretor de quarta ordem (PC4)

Apenas para exemplificar, um dos casos estudados considera o vetor de estados  $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4, \dot{x}_5, \dot{x}_6)$  igual a  $(1.0, 0.0, 0.0, 0.25, 0.0, 0.0)$ . Considerando também valores de  $J_s$  sempre igual a 0.0001 para fins de teste, ou seja,  $J_2 = 0.0001$ ,  $J_3 = 0.0001$ ,  $J_4 = 0.0001$ ,  $J_5 = 0.0001$ ,  $J_6 = 0.0001$  e tempo total de simulação igual a 1 (referente a um período orbital em variáveis adimensionais), tem-se o resultado apresentado na Figura 1.

Na Figura 1 a órbita com traço em preto é modelada com o Método de Cowell e RK4, a órbita com traço em vermelho é modelada com Sundman e RK4 e a órbita com traço azul é modelada com Sundman e PC4. Observa-se que o traço gerado com o Método de Cowell diverge um pouco dos demais e provavelmente isso se deve a precisão do método com a transformação de Sundman, mas isso deve ser verificado em trabalhos futuros.

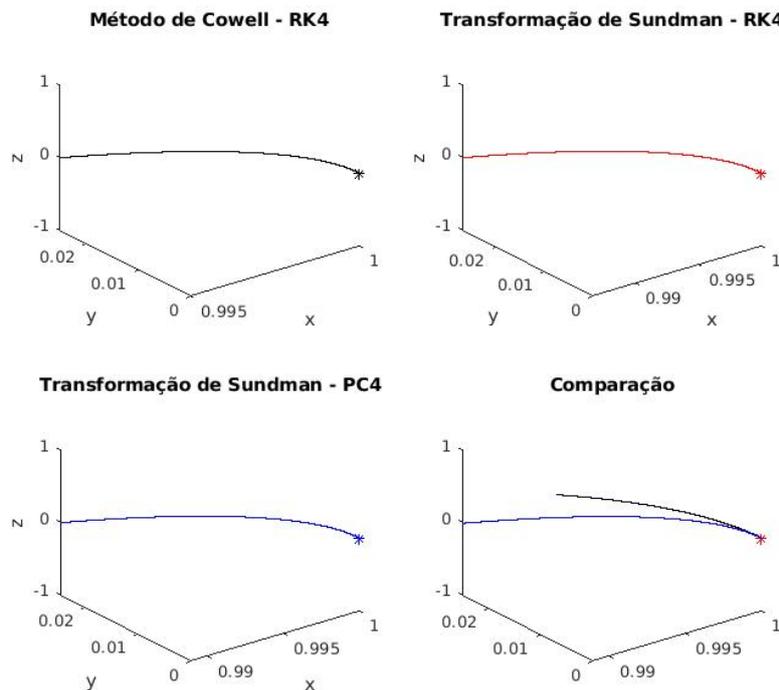


Figura 1. Órbita no PRC3C, modelada por: (a) Método de Cowell e RK4, (b) Transformação de Sundman e RK4, (c) Transformação de Sundman e PC4. (d) Comparação entre os diferentes métodos

Para se avaliar com mais precisão a diferença entre os dois trabalhos, se faz necessário desenvolver integradores mais sofisticados, como RK78. O PRC3C não apresenta solução analítica, portanto para se avaliar qual solução é mais próxima do esperado se faz necessário comparar com um integrador mais sofisticado. O problema do uso de integradores de alta ordem é o alto custo computacional. Esta comparação será realizado em trabalhos futuros.



#### 4. Conclusão

Este trabalho teve como objetivo explorar os conceitos de regularização em mecânica celeste e aplicá-los para o problema circular restrito dos três corpos. Este modelo matemático foi integrado utilizando o Método de Cowell e foi ajustado utilizando uma transformação de Sundman para comparar com o modelo anterior. Foram verificados também a performance de diferentes integradores, como RK4 e PC4. Algumas poucas comparações foram realizadas, mas observa-se que o PC4 apresentou uma performance melhor quando compara com o RK4 para os casos estudados. Observou-se diferenças nas órbitas entre o Método de Cowell e de Sundman, sendo indicativo portanto de melhoria de qualidade de integração, apesar do maior custo computacional. Este indício precisa ser verificado com mais detalhes em trabalhos futuros. Não foram observadas variações nos tempos entre os dois métodos, mas apenas entre os diferentes integradores.

#### Referências

KOPAL, Z.; LYTTLETON, R. A. On the elliptic case of the restricted problem of three bodies and the remote history of the earth-moon system. *Icarus*, v. 1, n. 1-6, p. 455–458, 1963.

KUGA, H. K.; CARRARA, V.; RAO, K. R. Satélites artificiais - Movimento orbital. 2011. Disponível em: < <http://mtc-m16d.sid.inpe.br/col/sid.inpe.br/mtc-m19/2011/11.22.18.25/doc/publicacao.pdf> >. Acesso em 30 set. 2021.

KUGA, H. K.; CARRARA, V.; RAO, K. R. Introdução à Mecânica Orbital. 2012. Disponível em: < [https://www.researchgate.net/publication/263198643\\_INTRODUCAO\\_A\\_MECANICA\\_ORBITAL-2A\\_EDICAO](https://www.researchgate.net/publication/263198643_INTRODUCAO_A_MECANICA_ORBITAL-2A_EDICAO) >. Acesso em 30 set. 2021.

STIEFEL, E L.; SCHEIFELE, G.; Linear and regular celestial mechanics. Springer, Berlin, 1971.